

# Modelo para la potencia de una turbina eólica\*

Juvenal Villanueva Maldonado\*\* y Luis Alvarez-Icaza \*\*\*

Instituto de Ingeniería  
Universidad Nacional Autónoma de México  
04510 Coyoacán DF, México

**Resumen** Se proponen dos modelos para la potencia mecánica producida por una turbina eólica. Los dos modelos de potencia están basados en la velocidad relativa entre el viento y las hélices. Estos son comparados con un modelo de potencia heurístico de referencia usado en la literatura.

**Palabras clave:** Turbina eólica, potencia mecánica, velocidad relativa y fricción.

## 1. Introducción

Las energías renovables juegan en la actualidad un papel muy importante en la búsqueda de formas diferentes para generar energía eléctrica. El uso de turbinas eólicas para extraer la energía cinética que está contenida en las corrientes de aire es una de las fuentes renovables con mayor crecimiento en el mundo. Se desea que estas turbinas maximicen la energía extraída, siempre y cuando se pueda mantener condiciones seguras de operación. Para esto, el control tiene un papel muy importante en el estudio de la conversión y extracción segura de la energía disponible en el viento.

En la literatura se pueden encontrar trabajos donde se lleva a cabo el diseño y la simulación de controladores a través de diferentes técnicas que buscan mejorar el funcionamiento de las turbinas eólicas y que hacen uso de modelos heurísticos para la potencia mecánica, ( $P$ ), y del coeficiente de potencia, ( $C_p$ ), de la turbina. En (Heier, 1998) se puede encontrar un modelo que se utiliza frecuentemente y que está dado por

$$P = \frac{1}{2} \rho C_p(\lambda, \alpha) A_R \dot{x}^3, \quad (1)$$

donde

$$C_p = 0,5 \left( \frac{116}{\lambda_i} - 0,4\alpha - 5 \right) e^{-\frac{21}{\lambda_i}}, \quad (2)$$

---

\* Investigación patrocinada por los proyectos CONACYT 47583 y UNAM-DGAPA-PAPIIT IN117108

\*\* Estudiante de posgrado, jvillanuevama@iingen.unam.mx

\*\*\* Investigador, alvar@pumas.iingen.unam.mx, Corresponsal

con

$$\frac{1}{\lambda_i} = \left( \frac{1}{\lambda + 0,08\alpha} - \frac{0,035}{\alpha^3 + 1} \right), \quad (3)$$

y

$$\lambda = \frac{R\omega}{\dot{x}}. \quad (4)$$

Aquí,

- $A_R$  es el área de barrido de la turbina
- $C_p$  es el coeficiente de potencia
- $\dot{x}$  es la velocidad del viento
- $\rho$  es la densidad del viento
- $\lambda$  es la relación de velocidades en la punta de la hélice
- $\alpha$  es el ángulo de ataque de la hélice
- $R$  es el radio de las hélices
- $\omega$  es la velocidad angular

En la Fig. 1, se observan las curvas características del coeficiente de potencia ( $C_p$ ) dado por la Ec. (2) para distintos valores de  $\alpha$ .

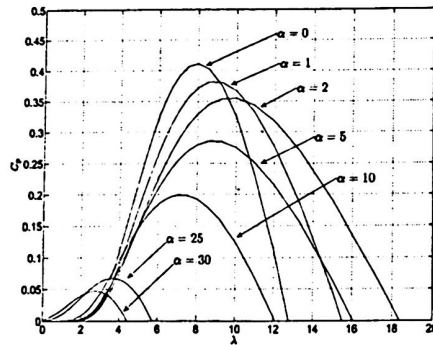


Figura 1. Curvas características de  $C_p$  vs  $\lambda$ , para distintos ángulos de ataque.

El coeficiente de potencia es un elemento muy importante dentro del modelo de potencia mecánica de la turbina, ya que es el factor que determina la cantidad de energía cinética que se puede extraer del viento. Tiene un límite teórico (límite de Betz) dado por  $C_p \leq 0,59$ .

En (Villanueva y Alvarez-Icaza, 2007) se puede encontrar una transformación del modelo de  $C_p$  que está dada por

$$\lambda' = \frac{\dot{x} - r\omega}{\dot{x}_m}, \quad \dot{x}_m \neq 0, \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{R}{r} \left[ 1 - \lambda' \frac{\dot{x}_m}{\dot{x}} \right], \quad (6)$$

$$r = R \left[ \frac{(0,4\alpha + 5) + \frac{4,06}{\alpha^3 + 1}}{116 - 0,08\alpha \left( (0,4\alpha + 5) + \frac{4,06}{\alpha^3 + 1} \right)} \right], \quad (7)$$

$$\frac{1}{\lambda_i} = \left( \frac{1}{\lambda + 0,08\alpha} - \frac{0,035}{\alpha^3 + 1} \right), \quad (8)$$

$$C_p = \text{sgn}(\lambda') 0,5 \left( \frac{116}{\lambda_i} - 0,4\alpha - 5 \right) e^{-\frac{21}{\lambda_i}}. \quad (9)$$

La Fig. 2 muestra las curvas características para este modelo. Debe notarse la simetría del modelo que describe indistintamente los regímenes de turbina y ventilador.

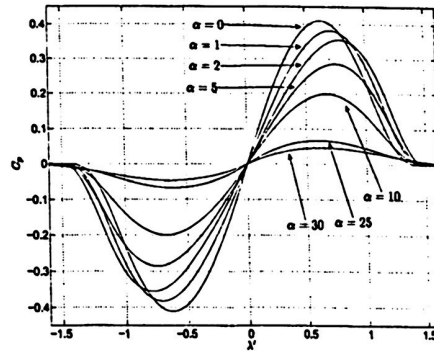


Figura 2. Curvas características de  $C_p$  vs  $\lambda'$ .

## 2. Potencia Mecánica de la turbina.

El interés en controlar una turbina está más relacionado con la potencia mecánica que se puede extraer del viento que con el coeficiente de potencia. Por ello, en esta sección se introducirán dos modelos que están directamente relacionados con la potencia mecánica de la turbina que dependen de la velocidad relativa, dada por

$$\dot{x}_R = \dot{x} - R\omega. \quad (10)$$

Para esto es necesario observar el comportamiento de la potencia mecánica en contra de la velocidad relativa, como se puede apreciar en la Fig. 3 para diferentes valores de la velocidad angular,  $\omega$ , y  $\alpha=0$ , al utilizar las Ecs. (1), (9) y (10).

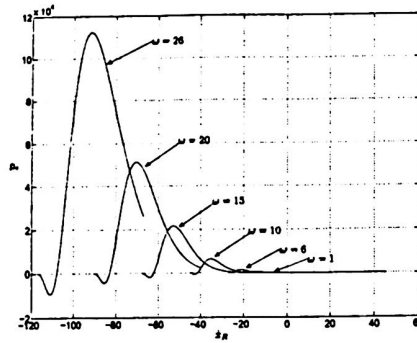


Figura 3. Potencia mecánica vs Velocidad relativa,  $\dot{x}_R$ .

De la Fig. 3, se observa que cuando  $P = 0$  entonces  $\dot{x}_R \neq 0$  y su valor es distinto para cada valor de  $\omega$ . Por ello que se supone que existe una nueva velocidad relativa,  $\dot{x}_{r'}$ , elegida de tal forma que cumpla con

$$P = 0 \iff \dot{x}_{r'} = 0,$$

donde

$$\dot{x}_{r'} = \dot{x} - r'\omega, \quad (11)$$

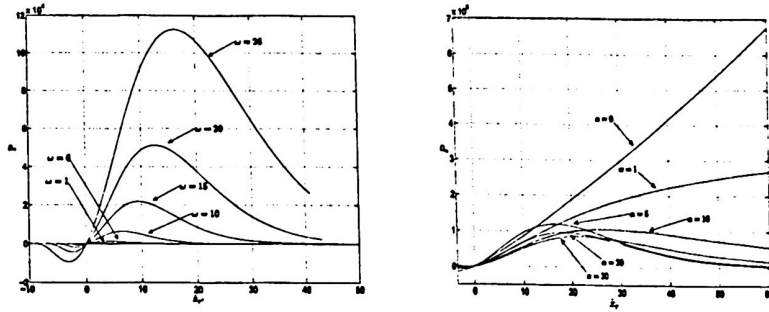
como  $\dot{x}$  y  $\omega$  son conocidas,  $r'$  debe satisfacer

$$\dot{x} - r'\omega = 0 \iff P = 0,$$

de esta manera se tiene que

$$r' = \frac{\dot{x}}{\omega}. \quad (12)$$

Evaluando en los puntos donde  $P = 0$  con los valores de  $\dot{x}$  y  $\omega$ , se tiene que  $r' = 0,078R$  para todos los casos<sup>1</sup>. Se puede observar en la Fig. 4(a), la influencia que existe de la velocidad relativa con la potencia mecánica. La Fig. 4(a) representa también los dos regímenes de las curvas de  $C_p$  en la Fig. 2.



(a) Caso 1:  $\alpha = \text{constante}$  y  $\omega = \text{variable}$ . (b) Caso 2:  $\omega = \text{constante}$  y  $\alpha = \text{variable}$ .

Figura 4. Potencia mecánica vs Velocidad relativa,  $\dot{x}_r$ .

Se debe notar que las curvas en la Fig. 4(a) son válidas para el caso de  $\alpha = 0$ . Al evaluar este mismo para  $\omega$  constante y  $\alpha$  variable, se observó que solo en el caso de  $\alpha = 0$  se tiene  $P = 0$  cuando  $\dot{x}_r = 0$ , por lo que se propuso tomar el valor de  $r$  dado por la Ec. (7). De esta se tiene que

$$\dot{x}_r = \dot{x} - r\omega, \quad (13)$$

por lo que se obtiene la representación para el caso de  $\omega$  constante que se muestra en la Fig. 4(b). Se puede observar que se representan también los dos regímenes.

## 2.1. Modelos de potencia propuestos

Las curvas de la Fig. 4(a) pueden ser usadas para proponer la estructura de los dos modelos en términos de la velocidad relativa. Para tales modelos se considerará un rango de viento donde se pretende tener un valor de potencia positiva en la mayoría de los casos.

<sup>1</sup> El valor obtenido para el caso de estudio fue  $R = 4,5$  m, de esta forma  $r' = 0,078 \times R = 0,351$ .

**Primer modelo** El modelo está dado por

$$P = k_1 e^{(-k_2 \dot{x}_r)} \text{sign}(\dot{x}_r) |\dot{x}_r|^{k_3} \dot{x}^3, \quad (14)$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  son los parámetros que se deben de estimar. El modelo está inspirado por la forma de las curvas en la Fig. 4(a) y el trabajo en (Yi *et al.*, 2002). Este modelo puede ser parametrizado de la siguiente forma

$$\ln\left(\frac{P}{\dot{x}^3}\right) = [1 \quad \dot{x}_r \quad \ln(|\dot{x}_r|)] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix},$$

donde el vector de parámetros está dado como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(k_1) \\ -k_2 \\ k_3 \end{bmatrix},$$

mientras que el regresor está dado por

$$\Phi = [1 \quad \dot{x}_r \quad \ln(|\dot{x}_r|)].$$

Por lo que la parte positiva de  $P$  puede ser expresada como

$$\ln\left(\frac{P}{\dot{x}^3}\right) = \Phi \Sigma. \quad (15)$$

La Ec. (15) permite utilizar el método de mínimos cuadrados recursivos normalizados (ver, por ejemplo, (Ioannou y Sun, 1996)).

**Segundo modelo** Este modelo está dado por

$$P = 10000 \sigma_1 \dot{x}_r + 1000 \sigma_2 \text{sign}(\dot{x}_r) \dot{x}_r^2 + 10 \sigma_3 \dot{x}^3, \quad (16)$$

el cual está inspirado por la forma de la fuerza de algunos modelos de fricción dinámica (ver (Canudas de Wit *et al.*, 1995)). Este modelo puede ser parametrizado como sigue

$$P = [10000 \dot{x}_r \quad 1000 \text{sign}(\dot{x}_r) \dot{x}_r^2 \quad 10 \dot{x}^3] \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

### 3. Resultados de simulación

Para examinar los modelos propuestos contra el modelo de referencia, se utilizaron los siguientes datos

- $R = 4.5$  m.
- $\dot{x}_m = 15$  m/s.

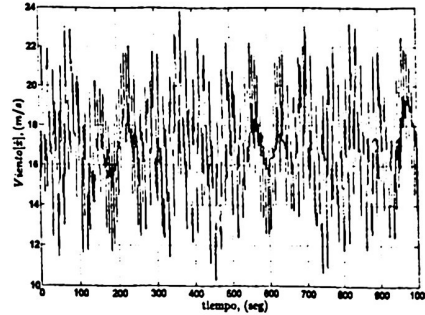


Figura 5. Señal de viento,  $\dot{x}$ , vs tiempo

- $\alpha = 0$ .
- $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ .

y como señal de excitación al viento,  $\dot{x}$ , cuya velocidad está dada por la señal que se observa en la Fig. 5.

Para los valores de  $\omega$  y  $\alpha$ , se tomaron dos casos de evaluación, debido a los dos tipos de generadores que se utilizan. En el primer caso se tomó  $\omega$  en un rango de 1 a 27 Hz, con  $\alpha = 0$ , mientras que el segundo a  $\alpha$  en el rango de  $0^\circ$  a  $30^\circ$  con  $\omega = 26.5 \text{ Hz}$ . Esto permite comparar ambos modelos entre sí.

### 3.1. Caso 1: $\omega$ variable, $\alpha$ constante.

**Primer modelo** Para observar con mejor detalle los resultados, en las figuras se muestran las señales para los valores de  $\omega=1, 10.5, 26.5$ . Se puede observar en la Fig. 6(a) los resultados de la estimación para el modelo dado por la Ec. (14).

La Fig. 6(b) muestra la evolución de los parámetros con respecto al tiempo, para los mismos casos de  $\omega$  que se muestran en la Fig. 6(a).

La Fig. 6(c) muestra la variación de los parámetros  $\sigma_i$  contra la variación de  $\omega$ , la velocidad angular del rotor. Como se puede observar con respecto a las Figs. 6(a), (b) y (c), un conjunto particular de parámetros es válido solamente para una determinada  $\omega$ .

**Segundo modelo** En este caso, se tiene la señal de potencia en la Fig. 6(d), que muestra un mejor resultado con respecto al que se observa para el primer modelo en la Fig. 6(a). En la Fig. 6(e) se observa la evolución de los parámetros con respecto al tiempo y en comparación a lo mostrado en la Fig. 6(b), se concluye

que no hay mucha diferencia en el tiempo de evolución. La diferencia entre estos modelos se observa en las Figs. 6(c) y 6(f). En la Fig. 6(f) se puede ver el cambio de los parámetros en contra de  $\omega$ , para el segundo modelo. Como se observa, estos muestran una complejidad mayor a la mostrada por los parámetros en la Fig. 6(c).

### 3.2. Caso 2: $\omega$ constante, $\alpha$ variable.

Para este caso solo se mostrarán las gráficas de potencia contra el tiempo, mostrando solamente las señales para  $\alpha = 0, 5$  y  $30$ , y de los parámetros  $\sigma_i$  versus  $\alpha$ , para ambos modelos.

**Primer modelo** Para este caso los resultados que se observan en la Fig. 7(a) resultan ser muy buenos, al igual que en los casos anteriores. Pero en este caso, se observa que un señal de potencia es negativa cuando  $\alpha = 0$ , esto significa que se tiene una velocidad relativa negativa, dada por la relación entre el viento y la velocidad angular, lo que significa que el aerogenerador está trabajando como ventilador, caso que no se desea.

En Fig. 7(b) se muestra el comportamiento de los parámetros  $\sigma_i$  con respecto al cambio de valor de  $\alpha$ , el cual presenta también un mayor grado de complejidad que en los casos anteriores. Así mismo, se tiene un conjunto particular de parámetros para cada valor de  $\alpha$ .

**Segundo modelo** La Fig. 7(c) muestra un mejor comportamiento del modelo en la potencia con respecto al mostrado en la Fig. 7(a). Se observa en las Figs. 7(b) y 7(d) un resultado similar al mostrado en las Figs. 6(c) y 6(f) que muestran el comportamiento de los parámetros  $\sigma_i$  vs  $\alpha$ . Como se puede observar, las señales de la Fig. 7(d) tienen un grado de complejidad mayor al mostrado por las señales de la Fig. 7(b).

## 4. Conclusiones

Se han presentado dos nuevos modelos para representar la potencia mecánica de una turbina eólica. Estos modelos fueron inspirados por la representación de la fricción pseudo-estática y dinámica, en un intento de reproducir la transformación de energía cinética del viento por las hélices de la turbina como un fenómeno de fricción. Los nuevos modelos hacen uso de la noción de la velocidad relativa que hay entre el viento y las hélices. Los modelos mostraron un comportamiento similar a un modelo heurístico de referencia de la literatura, el cual es muy popular para este tipo de estudios. Existen dos ventajas principales en el uso de las nuevas representaciones. Los parámetros tienen una interpretación física y es posible utilizar técnicas de identificación para obtener sus valores para una turbina dada. Se está realizando el estudio de la dependencia de los parámetros en  $\omega$  y  $\alpha$ , con lo que se espera obtener un modelo global de la potencia. También está en proceso la verificación experimental de estos modelos.



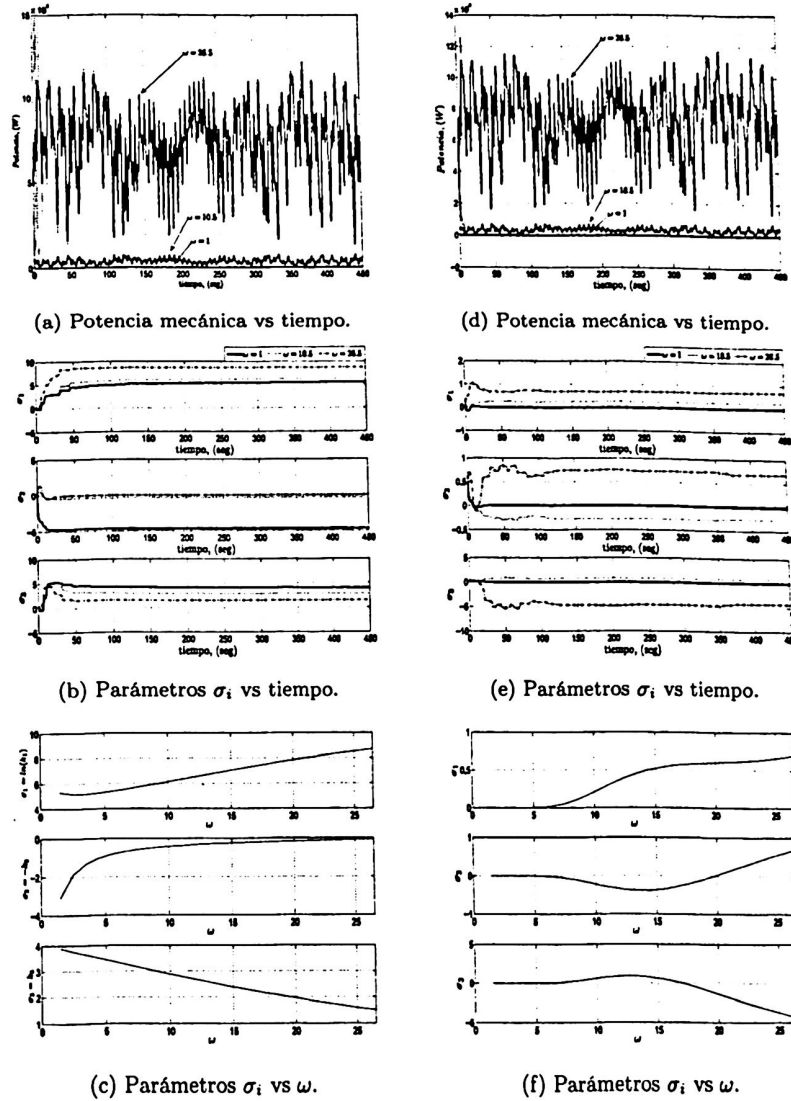


Figura 6. Se muestran los resultados de simulación obtenidos en el caso 1, los resultados del primer modelo se muestran en (a), (b) y (c), y para el segundo modelo se tienen en (d), (e) y (f).

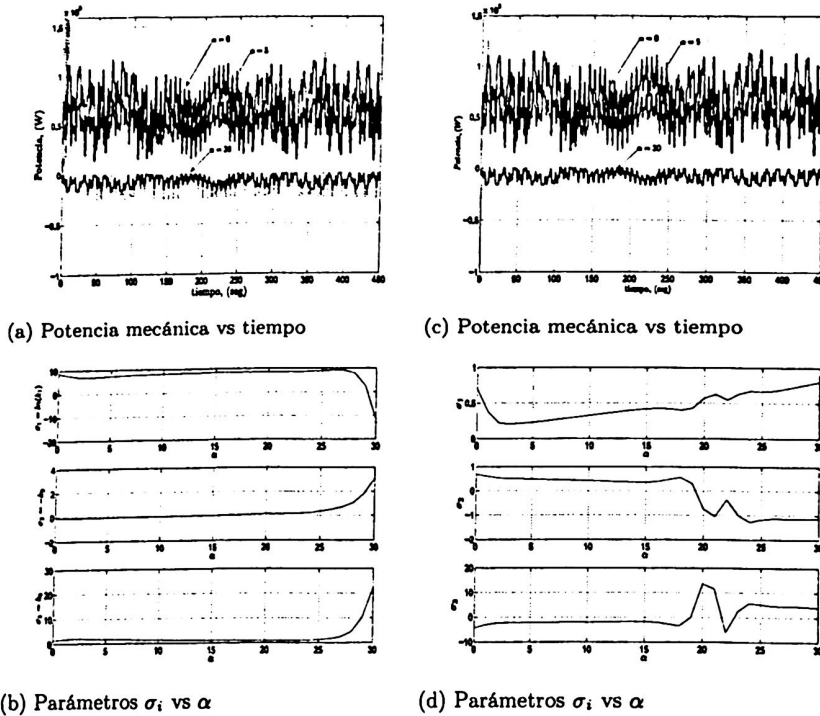


Figura 7. Se muestran los resultados de simulación obtenidos en el caso 2, los resultados del primer modelo se muestran en (a) y (b), para el segundo modelo se tienen en (c) y (d), donde en (a) y (c) la línea de referencia: continua, y la estimada: discontinua.

## Referencias

- Canudas de Wit, C., H. Olsson, J. Åström y P. Lischinsky (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transaction on Automatic Control* 40(3), 419–425.
- Heier, S. (1998). *Grid Integration of Wind Energy Conversion Systems*. Wiley.
- Ioannou, Petros A. y Jing Sun (1996). *Robust Adaptive Control*. PTR Prentice-Hall.
- Villanueva, J. y L. Alvarez-Icaza (2007). Modelado del coeficiente de potencia de un aerogenerador por efecto de fricción.. *Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático, AMCA73* pp. 1–6.
- Yi, J., L. Alvarez y R. Horowitz (2002). Adaptive emergency braking control with underestimation of friction coefficient. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 10, 381–392.